

頻度概念確率定義とコルモゴロフの公理

ある試行で所定の A という結果が出る確率を $P(A)$ とします。フォン・ミーゼスはこの $P(A)$ は試行を N 回繰り返したとき結果 A が N_a 回出たとしたときに、その比率 N_a / N を考えて N を無限大にまで大きくしたときに収束するであろう値であると定義したのです。

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_a}{N} \quad \dots \quad (1)$$

つまり A の出る確率は (1) 式の $P(A)$ であるとしたのです。収束するであろうという表現はあいまいですが、収束することは証明出来ないからです。この点は昔から批判されてきました。

純粋数学の確率理論は公理に基づいています。コルモゴロフの公理は次の式を満たす $P(A)$ を確率としました。この公理を満たしさえすればそれが何を意味するものでも確率理論のすべての定理が適用できます。

- [1] $P(A)$ は非負の実数である。
- [2] 確実な事象 A の確率 $P(A)$ は 1 である。
- [3] 事象 A と事象 B が相互背反ならば A か B が起こる確率 $P(A+B)$ は $P(A)+P(B)$ である。

フォン・ミーゼスの定義した確率 $P(A)$ が上記の公理を満たしているか吟味します。

- [1] は (1) 式が収束しなくても満たしています。
- [2] は常に $N_a = N$ ですから、満たしています。
- [3] はどうでしょうか。

同じ試行で結果 B の出る確率は次式となります。

$$P(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_b}{N} \quad \dots \quad (2)$$

すると、結果 A か B がでる確率は、フォン・ミーゼスの定義により次式です。

$$P(A+B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_a + N_b}{N} \quad \dots \quad (3)$$

一方、(1) 式と (2) 式の両辺を足し合わせると (4) 式が得られます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_a}{N} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_b}{N} = P(A) + P(B) \quad \dots \quad (4)$$

(3) 式と(4) 式は一見、等しいとおけそうですが、極限值は和の順序を変えると一般的には等しくないのです。

つまり、 $P(A)+P(B)=P(A+B)$ が保証されていません。

結論として、フォン・ミーゼスの定義した頻度概念確率はコルモゴロフの確率理論が前提とする公理が満たされていないのです。