

ジェインズの「確率理論：科学の論理」は合理的で常識との定性的一致および首尾一貫していること（デシダレータ）を下にした論理の展開であった。それは単純に数学の問題であって、結論はラプラスの確率に不動の基礎を与えるものであった。今回は、積の規則が導かれる様子を第２章から紹介した。今回は同じく第２章から和の規則が導かれる部分を説明する。そして、積の規則と和の規則が二つの強い三段論法と三つの弱い三段論法に対応していることを示す。

和の規則

今考えられている命題は真か偽で無ければならないアリストテリアン論理型であるから、論理積 $A \bar{A}$ は常に偽で、論理和 $A + \bar{A}$ は常に真である。 A が偽である妥当さは何らかの方法でそれが真である妥当さに依存しなければならない。もし、我々が $u \equiv w(A|B)$ 、 $v \equiv w(\bar{A}|B)$ と定義するならば、ある関数関係が存在しなければならない。

$$v = S(u) \quad (2.36)$$

明らかに、常識との定性的一致は $S(u)$ が $0 \leq u \leq 1$ で、極値 $S(0)=1$ 、 $S(1)=0$ の連続単調減少関数であることを要求する。しかし、これらの特性を持ったどんな関数でも良いわけではない。というのは、積の規則が AB に対しても、 $A\bar{B}$ に対しても、書けるという事実首尾一貫したものでなければならぬからである。

$$w(AB|C) = w(A|C)w(B|AC) \quad (2.37)$$

$$w(A\bar{B}|C) = w(A|C)w(\bar{B}|AC) \quad (2.38)$$

このように、(2.36)、(2.38)を用いて、(2.37)式は、

$$w(AB|C) = w(A|C)S[w(\bar{B}|AC)] = w(A|C)S\left[\frac{w(A\bar{B}|C)}{w(A|C)}\right] \quad (2.39)$$

再び、我々は可換性を呼び起こす。 $w(AB|C)$ は A 、 B に関して対象であるので首尾一貫性は次を要求する。

$$w(A|C)S\left[\frac{w(A\bar{B}|C)}{w(A|C)}\right] = w(B|C)S\left[\frac{w(B\bar{A}|C)}{w(B|C)}\right] \quad (2.40)$$

これはすべての命題 A 、 B 、 C に対し成立しなければならない。特に、(2.40)は、

$$\bar{B} = AD \quad (2.41)$$

ここで、 D はどんな新しい命題でも、成立しなければならない。

$$A\bar{B} = \bar{B}、\quad B\bar{A} = \bar{A} \quad (2.42)$$

そして、(2.25)で次のように書ける。

$$\begin{aligned} w(\overline{AB} | C) &= w(\overline{B} | C) = S[w(B | C)] \\ w(\overline{BA} | C) &= w(\overline{A} | C) = S[w(A | C)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

それ故、いまや省略形を用いて、

$$x = w(A | C), \quad y = w(B | C) \quad (2.44)$$

(2.25)式は、関数方程式になる。

$$xS\left[\frac{S(y)}{x}\right] = yS\left[\frac{S(x)}{y}\right], \quad \begin{aligned} 0 \leq S(x) \leq x, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (2.45)$$

これは $S(x)$ が積の規則に首尾一貫しているために持つべき比率特性を表している。特別な場合として、これは次式になる。

$$S[S(x)] = x \quad (2.46)$$

つまり、 $S(x)$ が自己逆数関数であることを述べていて、 $S(x) = S^{-1}(x)$ 。このように、(2.21)から $u = S(v)$ もまた同様である。しかし、これは A 、 $\overline{A}$ の間の関係が逆数関係であるという明らかな事実のみを表すものである。

(2.30)で与えられた有効性の範囲は以下のように見つかる。命題 D は任意であるから、いろいろな D の選択によって、我々は次式の $w(D | AC)$ の全ての値を達成できる。

$$0 \leq w(D | AC) \leq 1 \quad (2.47)$$

しかし、 $S(y) = w(D | AC) = w(A | C)w(D | AC)$ 、であるので、(2.47)は、(2.45)で述べられたように、ちょうど $(0 \leq S(y) \leq x)$ 。この領域は x 、 y に対象である。それはそれらを交換して等しく同じように書ける。幾何学的に、それは x - y 平面上、単位平面 $(0 \leq x, y \leq 1)$ で曲線 $y = S(y)$ 以上の、全ての点から構成される。

実際、曲線の形状は既に(2.45)がその無限小分上に横たわる点のために言っているところのものによって決められている。何故なら、もし我々が $y = S(x) + \varepsilon$ とおくならばそのとき $\varepsilon \rightarrow 0+$ に伴い、(2.45)の2項は異なる率であるが $S(1) = 0$ に近づく。それ故、全てが $S(1 - \delta)$ は $\delta \rightarrow 0$ のときに0に近づく正確な方法に依存している。これを研究するために、我々は新しい変数 $q(x, y)$ を次式によって定義する。

$$\frac{S(x)}{y} = 1 - \exp\{-q\} \quad (2.48)$$

それから、我々は $\delta = \varepsilon^{-q}$ を選び、関数 $J(q)$ を次式で定義し、

$$S(1 - \delta) = S(1 - \exp\{-q\}) = \exp[-J(q)] \quad (2.49)$$

$q \rightarrow \infty$ のとき、 $J(q)$ の漸近形を見つける。

今 x 、 q を独立変数と考え、(2.33)から、

$$S(y) = S[S(x)] + \exp\{-q\}S(x)S'[S(x)] + O(\exp\{-2q\}) \quad (2.50)$$

(2.46)とその微分 $S'[S(x)] S'(x) = 1$ を用いて、これは次式のように簡単になる。

$$\frac{S(y)}{x} = 1 - \exp\{-(\alpha + q)\} + O(\exp\{-2q\}) \quad (2.51)$$

ここで、

$$\alpha(x) \equiv \left[\frac{-xS'(x)}{S(x)} \right] > 0 \quad (2.52)$$

これらの置き換えで、我々の関数方程式(2.45)は次式になる。

$$J(q + \alpha) - J(q) = \log \left[\frac{x}{S(x)} \right] + \log(1 - \exp\{-q\}) + O(\exp\{-2q\}), \quad \begin{matrix} 0 < q < \infty \\ 0 < x < 1 \end{matrix} \quad (2.53)$$

$q \rightarrow \infty$ で、最後の二つの項は指数的に早く 0 になるので、 $J(q)$ は漸近的に線形でなければならない。

$$J(q) \sim a + bq + O(\exp\{-q\}) \quad (2.54)$$

正の傾斜で、

$$b = \alpha^{-1} \log \left[\frac{x}{S(x)} \right] \quad (2.55)$$

(2.54)で、(2.53)は x の異なった値の連続性を保持しなければならなく、それ故 $\alpha(x)$ の値の連続性のために、周期 α での周期項はない。

しかし、定義により J は q のみの関数であるから、(2.55)の右辺は x に独立でなければならない。このことは(2.52)を用いて、

$$\frac{x}{S(x)} = \left[\frac{-xS'(x)}{S(x)} \right]^b, \quad 0 < b < \infty \quad (2.56)$$

或いは、並び替えて、 $S(x)$ は次の微分方程式を満足しなければならない。

$$S^{m-1}dS + x^{m-1}dx = 0 \quad (2.57)$$

ここで、 $m \equiv 1/b$ はある正で一定な数である。 $S(0)=1$ を満足するこの解は、

$$S(x) = (1 - x^m)^{1/m}, \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 < m < \infty \end{matrix} \quad (2.58)$$

そして逆に、我々は(2.58)が(2.45)の一つの解であることは直ちに判る。

結果(2.58)は R.T.コックス(1946)が $S(x)$ は 2 回微分が可能であると仮定しているところの異なった議論で最初に導かれたものである。アクツェル(1966)は同じ結果を微分可能性の仮定なしで導いている。いかなる場合にも、(2.58)は関数方程式(2.45)と左の境界条件 $S(0)=1$ を満足する最も一般的な関数である。

B のための特別な選択(2.41)を用いた関数方程式(2.45)の我々の誘導から、このように(2.58)が一般首尾一貫性要求(2.40)を満足するための必要条件であるということだけを示している。その十分性を吟味するために(2.58)を(2.40)に置き換えよう。

$$w^m(A|C) - w^m(\overline{AB}|C) = w^m(B|C) - w^m(\overline{BA}|C), \quad (2.59)$$

つまり、(2.28)と(2.38)により些細な同一性を得る。それ故、(2.58)は(2.40)の意味において首尾一貫性のために $S(x)$ に関して必要十分条件なのである。

この点までの結果を要約する。論理積の結合律は妥当さ、 $x = A|B$ 、のある単調関数が積の規則(2.28)に従わなければならないことを要求する。結果、(2.58)はこの同じ関数が和の規則にもまた従わなければならないと言うことを述べている。ある正の m に対して、

$$w^m(A|B) + w^m(\bar{A}|B) = 1 \quad (2.60)$$

もちろん、積の規則自身が等しく次式のように書かれ得る。

$$w^m(AB|C) = w^m(A|C)w^m(B|AC) = w^m(B|C)w^m(A|BC) \quad (2.61)$$

しかし、そのとき我々は m の値は実際に無関係であることを見る。どんな値が選ばれようとも一つの新しい関数を定義できるのである。

$$p(x) \equiv w^m(x) \quad (2.62)$$

そして、我々の規則は次の形式を取る。

$$p(AB|C) = p(A|C)p(B|AC) = p(B|C)p(A|BC) \quad (2.63)$$

$$p(A|B) + p(\bar{A}|B) = 1 \quad (2.64)$$

デシダレータによって許された全ての可能性は、 $p(x)$ が $0 \leq p(x) \leq 1$ の範囲で連続単調増加関数である、(2.63)、(2.64)に含められている。

もっと更なる関係式が、 $\{A_1, \dots, A_n\}$ のこれらから論理関数 $f(A_1, \dots, A_n)$ の妥当さを決めるために、妥当さの推測のための規則の完全な集合を生み出すために必要であろうか。

このことを確かめるために、我々は最初に論理和 $A+B$ のための一つの公式を求める。積の規則と和の規則を繰り返し適用して、

$$\begin{aligned} p(A+B|C) &= 1 - p(\bar{A}\bar{B}|C) = 1 - p(\bar{A}|C)p(\bar{B}|\bar{A}C) \\ &= 1 - p(\bar{A}|C)[1 - p(B|\bar{A}C)] = p(A|C) + p(\bar{A}B|C) \\ &= p(A|C) + p(B|C)p(\bar{A}|BC) = p(A|C) + p(B|C)[1 - p(A|BC)] \end{aligned} \quad (2.65)$$

そして結局、

$$p(A+B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(AB|C) \quad (2.66)$$

この一般化した和の規則は応用に最も役立つものの一つである。明らかに、原始的な和の規則(2.64)は (2.66)で $B = \bar{A}$ の特別な場合である。

定性的特性

さて、(2.63)と(2.64)に基づいた理論は演繹的論理の理論と第1章で我々が出発点としたさまざまな定性的三段論法に関係している。最初に、 $p(A|B) \rightarrow 0$ 又は $p(A|B) \rightarrow 1$ のような極限で和の規則(2.64)がアリストテリアン論理の原始的な必要条件を表す事は明らかである。

二つの強い三段論法(1.1)、(1.2)を構成する論理の全てと、それらから続く全てのものは、今や含意符合(1.14)を主たる前提の叙述に用いて、

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \text{ のもとに、} A \text{ が真ならば } B \text{ が真} \\ A \rightarrow B \text{ のもとに、} B \text{ が偽ならば } A \text{ が偽} \end{aligned} \quad (2.68)$$

そして、Cがそれらの主たる前提を示すとするならば、

$$C \equiv \text{「} A \rightarrow B \text{」} \quad (2.69)$$

そのとき、これら三段論法は積の規則(2.63)にそれぞれ、次の形で対応する。

$$p(B|AC) = \frac{p(AB|C)}{p(A|C)}, \quad p(A|\bar{B}C) = \frac{p(A\bar{B}|C)}{p(\bar{B}|C)} \quad (2.70)$$

しかし、(2.68)から、我々は $p(AB|C)=p(A|C)$ と $p(A\bar{B}|C)=0$ を持ち、(2.70)は三段論法(2.68)で述べられたように、次のように簡単になる。

$$p(B|AC)=1, \quad p(A|\bar{B}C)=0 \quad (2.71)$$

このように、アリストテリアン演繹論理は、妥当さの推論のための我々の口ボットがその結果にもっともっと確かになるという、規則の極限形式である。

しかし、我々の規則は演繹的論理にも含まれないものもまた持っている。即ち、弱い三段論法(1.3)(1.4)の定量的な形である。最初の弱い三段論法、

$$A \rightarrow B \text{ のもとに、} B \text{ が真ならば } A \text{ がより妥当になる} \quad (2.72)$$

は積の規則(2.63)に次の形式で対応する。

$$p(A|BC) = p(A|C) \frac{p(B|AC)}{p(B|C)} \quad (2.73)$$

しかし、(2.68)から、 $p(B|AC)=1$ 。そして、 $p(B|C) \leq 1$ から(2.73)は三段論法で述べられているように、

$$p(A|BC) \leq p(A|C) \quad (2.74)$$

である。同様に、三段論法(1.4)は、

$$A \rightarrow B \text{ のもとに、} A \text{ が偽ならば } B \text{ は妥当さが少なくなる} \quad (2.75)$$

これは、次の形式で積の規則に対応する。

$$p(B|\bar{A}C) = p(B|C) \frac{p(\bar{A}|BC)}{p(\bar{A}|C)} \quad (2.76)$$

しかし、(2.74)から、 $p(\bar{A}|BC) \leq p(\bar{A}|C)$ であるので、(2.76)は三段論法で述べられたように、次式となる。

$$p(B|\bar{A}C) \leq p(B|C) \quad (2.77)$$

最後の三段論法(1.5)も、抽象的に述べられたときに非常に弱いものに見えるが、形式(2.73)に述べられているように、我々の積の規則に含まれる。さて、Cは背景情報を表すものとして、主たる前提、「もしAが真ならば、Bはより妥当になる」は、次の形を取る。

$$p(B|AC) > p(B|C) \quad (2.78)$$

そして、(2.73)はすぐに、三段論法で述べられたように次式を与える。

$$p(A|BC) > p(A|C) \quad (2.79)$$

$p(B|C)$ は1より大きくはなり得ないから A の妥当さにおける大きな増加は $p(B|C)$ が非常に小さいときにのみ起こり得るということなのである。他方、 A が真であるということを知ることは B の妥当さをほんの少し増加させるだけであるならば、そのとき B を観察することは逆に A の妥当さにほんの少しの増加をなし得る。

(4 完)