

ン・ピアソンの仮説検定理論等が出され、実務の確率の定義として確立しているかのように見えるのである。

しかし、このような極限值が一定の値に近づくことが数学的に保証されているわけではないし、この定義の確率を知るすべはなく前述のように信頼水準を設定して推定するしかない。また、例えば大量生産される電球等の信頼度ならまだしも、人工衛星やステーション等のように通常1機しかないものに無限に多くの同一の衛星を想定して相対頻度の極限值を持って定義することにはかなりの無理があるように思われる。

純粹数学者は確率の定義として実世界で何を意味しようとか関係ないという立場を取って理論の世界だけ完ぺきなものにした。これを確立したコルモゴロフ(Kolmogoroff)は3つの公理を満足する数 $P(A)$ を事象Aの確率と定義した。それは、

- I. $P(A)$ は非負の数である。 $P(A) \geq 0$
- II. 確実に生起する事象の確率は1である。 $P(S) = 1$
- III. もし、事象AとBが相互に背反であるならば、
$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

確率の公理を満たすものはラプラスの定義であっても、フオン・ミーゼスの定義を取ろうとも全て確率論の結果を応用出来るのである。この公理の基礎を固めている数学のキーワードは次のようなものである。

- ・ 完全加法族 completely additive class
- ・ 測度空間 measure space
- ・ 有限加法的測度 finitely additive measure
- ・ 可測集合 measurable set

フィシャー達と大論争があったとされている一派はベイズ流統計学派と呼ばれている人達である。人により少し趣が異なるが、サベジ(Savage)による定義は「命題の真偽に関する確信の度合い(degree of belief)に対して割り当てる数値」とするものである。同じ命題、例えば「A社の分離ボルトは作動する」に対して、試験データを見た人と何もデータを見ていない人とで割り当てる数値は異なってくる。このことから、主観確率(subjective probability)と呼ばれることがある。この派の人はすべての確率とは主観的なものであるという立場を取っていることもあって主観確率であることを否定しない。このことが「主観的なものは学問的でない」という風潮によって不当に評価されてきたきらいがある。

データを見てどのように確率を割り当てるかの割当方が数学の定理であるトーマス・ベイズの定理を使うという意味で規定されているのでむしろ客観的な方法なのである。情報が無いときにどのように事前分布を考えるか、定性的な情報をどのように組み入れるか等数式に乗りにくい情報の生かし方には研究の余地があるし、数学的でないと批判される余地がある。全く情報が無い状態についてはラプラスの定義のように一様分布を仮定することが合理的であると考えられている。意志決定を合理的に行うことを目的とする分野、例えば経済分野では殆どベイズ流統計学が使われている。

4. 確信の度合い

2節で客観的な確率を推定するというアプローチではパラドックスに陥ることを示した。これと同じ例を使って主観確率、即ち、確信の度合いとしての確率ならどのように決定を下せるかを示す。

「A社の分離ボルトは作動する」という命題が真である確信の度合い（確率）を p とする。

(1) A社の製品を試験する前の信頼度、即ち成功確率 p に関する事前情報が何も無い状態として0から1までの一様分布を仮定する。即ち、 p は0から1までのどの数値になるか分からないのでどの数値になるかは同じ割合であると見込むことが合理的であると考えるのである。事前分布は仮定により既知となる。

(2) 次に20個の試験結果が全て成功であったというデータを考慮するとベイズの定理により p に関する事後分布を求める事が出来る。ベイズの定理は事後分布は事前分布とデータの p に対する尤度の積に比例するというものである。

(3) p に関する知識が分布の形でよりはっきりしたわけであるが、分布を代表させる一つの数値は期待値である。事後分布は2項分布になるのでその期待

値は $\frac{r+1}{n+2}$ となる。ここで n は試験個数、 r は成功数である。

従って、20個の成功を見た後では確信の度合いとしての確率は $21/22 = 0.955$ となる。80個試験して75個合格であったB社の製品の信頼度は 0.927 となる。

20個の成功データを見ただけでは信頼度は0.955に過ぎないのである。もし、信頼度は0.999即ち千に一つしか失敗が許されないような部品が要求されており、1000個も試験する余裕はないような場合には、開発を管理して十分審査する以外に成功の確信を高める、即ち、信頼度を確保する手立てはないのである。これが信頼性管理活動が必要な理由でもある。

因に試験データが何も無いときには成功か不成功かの2つの状態が等しく起こりうると考えることが合理的であり確率はどちらも0.5である。これは一様分布を仮定した事前分布(Fig.3)の期待値でもある。確率を確率分布で表現したとき、その確率分布から求められる期待値が確率に他ならないのである。コイン投げで表が出るか裏が出るかという試行で「表が出る」という命題に対しても確信の度合いは0.5であるが、この場合の事前分布としてはデイルックのデルタ関数を借用して表現出来る。このような分布は強い確信の分布(Fig.4)であり、データがどのようなものであっても事後分布は事前分布と同じになる。

弱い $p = 0.5$ の確信

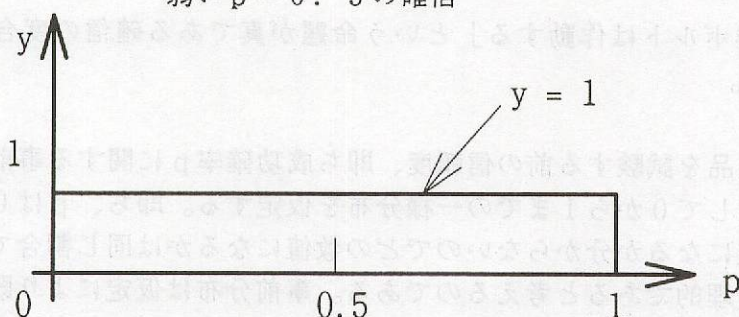


Fig.3 Dencity of Weak Belief

強い $p = 0.5$ の確信

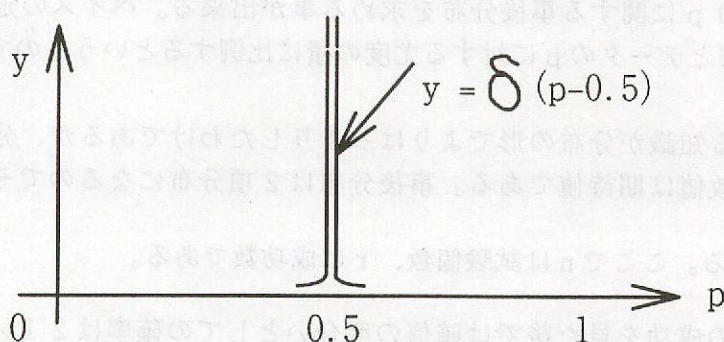


Fig.4 Dencity of Strong Belief

5. あとがき

私が実世界における確率の定義は変えるべきであるとの信念を抱いてから、あるいは取りつかれてから、ざっと20年間経ってしまった。要約すると、確率の定義は本質的に異なるものが4種類あり、このうち公理に基づくものは数学の世界でありなにも問題はない。実世界の現象を説明するために客観的な確率を想定した相対頻度の極限值という解釈は成功を納めたといって良い程の実績があり世の中に広く使われている解釈であるが、データが十分多い時にだけ使えるもので、よく考えると矛盾を含むものである。データが少なくても、少ないなりに何が言えるかを厳密にするためには、確率の解釈として確信の度合いを採用すべきである。この解釈は確率の古典的解釈である等確率の原理を含むより統一した立場の解釈である。

このような話を議論するならどこかのシンポジウムが適切であるとの上司のご意見は正当であることを承知の上で無理矢理お願いし、年に一度のNASA/NASDAの会議の場でNASAに対して問題提起をさせて頂いた。日本のシンポジウムでは、現行の方式をいささかでも否定する話は極めて受け入れられ難いことを思い知らされていたし、ベイジアン学派は米国に多い(Ref.14)と聞いていたからである。影響力の大きいNASAが問題点に気がついてくれさえすれば定義の見直しは簡単に実現するであろう。

今回の会議のNASA側の出席者は3名で、その団長はNASA本部のミッション・サクセス保証局の局次長 (Deputy Associate Administrator)のDr. Greenfieldであった。彼は自らNASAのアクション・アイテムとして設定し、持ち帰って検討することを約束してくれた。このような会議の宿題は次回にまで持ち越されるものだが2カ月足らずで返事がきた。Dr. Greenfield 自身の手紙と共に、彼の部下である Mr. Bob Weinstock が検討結果の第一報を書いてくれた。

Mr. Weinstock の手紙を要約すると、

- (1) 信頼水準を設定する現行方式には制約があり、信頼水準を設定する方策は何もないものである、従って、この点で原が言っていることに同意する、
- (2) NASAでは "uncertainty distribution" なる概念が state of the arts の方法として使われ出しているが、原が提案している内容はこのことではないか。これに関して2、3の資料から抜粋した部分を同封するので検討してみると良い、というものであった。

(2) に関して同封してくれた資料はミサイルを含む固体ロケットの失敗例の統計データを検討したもので非公開資料の一部らしきものであった。この中に、横軸に頻度(frequency)縦軸に(probability density)を取った図があり、考え方に近いものが有るようであるように思われるものの、まだこれまでの確率の定義に引きずられているようにも見受けられる。明確に確率の定義を変えることには抵抗があるのか、その意義に気がついていないかのどちらかである。

確率は命題の真偽に対する確信の度合い(degree of belief)に対して割り当てる数値であるとするサベジ流定義を受け入れた時、**確率は絶対的未来予測が出来ない人間の知識の程度を表現する道具に他ならないことがわかる。**

6. 文献

- (1) 軽構造理論とその応用、下、林毅編、日科技連、1966
- (2) 航空機構造の疲れ寿命の安全率、上山忠夫、日本航空宇宙学会誌、Vol.9 No. 88, 1961.5
- (3) Y S 1 1 の悲劇、山村堯、日本評論社、1995.4
- (4) Introduction To Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, D.V.Lindley, 1965
- (5) 確率統計入門 1 及び 2、竹内啓・新家健精、培風館、1969
- (6) ベイズの方法による疲労寿命とばらつき係数、原宣一、第 14 回構造強度に関する講演会、福岡市、1972
- (7) 属性試験と信頼度、原宣一、宇宙開発事業団第 5 回社内技術成果発表会、11/15/1978
- (8) L.F. Impellizzeri, ASTM CTP404, p.136, 1966
- (9) Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, Papoulis, 1965, McGraw-Hill

(10) Mathematical Methods of Statistics, Harold Cramer, 1966, Asian Text Edition,
Overseas Publication, First Published in Sweden, 1945

(11) Introduction to Mathematical Statistics, Hogg, et al, Third Edition 1970

(12) Quantity Control and Industrial Statistics, Duncan, Forth Edition 1974

(13) Journal of American Statistical Association, Vol. 59, 1964, p353 J.W. Pratt,
H. Raffia and R. Schlaifer

(14) Quantitative Analysis for Business Decisions, Bierman, et al, Forth Edition 1973